



TITLE:

$q$ -変形調和振動子の統一について (幾何学的力学系理論とその周辺)

AUTHOR(S):

小泉, 耕蔵

---

CITATION:

小泉, 耕蔵.  $q$ -変形調和振動子の統一について (幾何学的力学系理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2002, 1260: 148-171

ISSUE DATE:

2002-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41988>

RIGHT:

# $q$ -変形調和振動子の統一について

京都産業大学理学研究科 小泉 耕蔵 (Kouzou Koizumi)

e-mail:kkoizumi@cc.kyoto-su.ac.jp

## 概要

Macfarlane 型と Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子を統一的方法により記述する. この統一的方法では,  $q$ -変形調和振動子のハミルトニアンが  $q$ -変形消滅・生成演算子の  $q$ -変形反交換子によって与えられると仮定される.  $q$ -変形消滅演算子と  $q$ -変形生成演算子の座標表示およびハミルトニアンの固有関数は, Macfarlane 型および Dubna 型の  $q$ -差分方程式をそれぞれ解くことにより決定される. Macfarlane 型と Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子で求められた  $q$ -Hermite 関数は, パラメータ表現を用いることにより統一的に記述できる.  $q$ -変形調和振動子の物理的意味を明らかにするために, 長さの次元をもつ 2 種類の量を導入し次元解析を行った. これらの次元量の極限の取り方に依存して,  $q$ -変形ハミルトニアンが, それぞれ通常のハミルトニアン, 変形古典ハミルトン関数, 通常の古典ハミルトン関数へ移行することが示される.

## 1. 序論

$q$ -変形調和振動子の座標表示は, Macfarlane によって提案されたモデルで初めて実現された [1]. このモデルで彼は, Hilbert 空間が, 単位円周上で定義された Rogers-Szegő の多項式とガウス関数の積からなる関数により生成されていることを明らかにした [2, 3, 4, 5]. 無限区間で定義された座標をもつ Macfarlane 型の  $q$ -変形調和振動子は, Shabanov および Rajagopal によって研究された [6, 7]. これとは独立に, Dubna のグループは, 一次元相対論的系の研究により異なる種類の  $q$ -変形調和振動子を見出した [8]-[14]. Dubna のグループの  $q$ -変形調和振動子は, 無限区間で定義された座標を用いて与えられた. 本章では, Macfarlane 型および Dubna 型における概観を与える.

### 1.1 Macfarlane 型

Macfarlane 型の  $q$ -変形消滅演算子  $b$  および生成演算子  $b^\dagger$  は, 代数関係

$$q^{-1}bb^\dagger - qb^\dagger b = 1, \quad q = e^{-s^2}$$

を満たす. これらの演算子の座標表示は, それぞれ

$$\begin{aligned} b &= \alpha[e^{-2isx} - e^{-isx}e^{sp}], \\ b^\dagger &= \alpha[e^{2isx} - e^{sp}e^{isx}] \end{aligned}$$

の形で与えられる. 内積は, 通常の内積

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x)^* \phi(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2s}}^{\frac{\pi}{2s}} \sigma(x) \psi_s^*(x) \phi_s(x) dx, \\
\sigma(x) &= \frac{s}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp [-(sn - ix)^2]
\end{aligned} \tag{1.1}$$

として定義される.

## 1.2 Dubna 型

Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子は, 相対論的系を考察することにより見出された. 3次元相対論的運動量は

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 1 \tag{1.2}$$

を満たす. この場合, Gel'fand-Graev-Shapiro 変換

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) &= (p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^{-1-ir}, \quad \mathbf{r} = r\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad 0 < r < \infty \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi^*(\mathbf{p}'; \mathbf{n}', r') \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{1+\mathbf{p}^2}} &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi^*(\mathbf{p}'; \mathbf{n}, r) d\mathbf{r} &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \sqrt{1+\mathbf{p}^2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

を用いることにより, 通常の Fourier 解析が可能となる.

特に, 1次元相対論的運動量は, 関係

$$p_0^2 - p^2 = 1$$

を満たすことから, 変換

$$\begin{aligned}
\langle x|p \rangle &= (p_0 - p)^{-ix} = e^{ixx}, \quad -\infty < x < \infty, \\
p_0 &= \cosh \chi = 1 + \sinh^2 \frac{\chi}{2}, \quad p = \sinh \chi, \quad \chi = \ln(p_0 + p)
\end{aligned}$$

を行うことにより, 通常の Fourier 変換

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_p \langle x|p \rangle \psi(p), \quad d\Omega_p = \frac{dp}{p_0} = d\chi$$

が可能となる.

Dubna 型の  $q$ -変形消滅・生成演算子が  $q$ -変形交換関係

$$[A, A^\dagger]_q = qAA^\dagger - q^{-1}A^\dagger A = 2(q^{-1} - q)$$

を満たすと要請する. この交換関係を満たす  $q$ -変形消滅・生成演算子 ( $q = e^{-s^2/4}$ ) の座標表示は

$$A = \frac{2i}{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sinh \frac{i}{2} \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{2}x^2},$$

$$A^\dagger = \frac{2i}{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}x^2} \sinh \frac{i}{2} \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

として与えられる。ハミルトニアンは

$$H_q = \frac{1}{2} \{A, A^\dagger\}_q = \frac{1}{2} (qAA^\dagger + q^{-1}A^\dagger A)$$

と仮定される。このタイプの  $q$ -変形消滅演算子と生成演算子が互いに Hermite 共役であるためには、内積は

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \phi(x) \cos \frac{x}{2} dx$$

によって定義される。従って、この定義の下で、自己内積は必ずしも正定値ではない。

## 2. $q$ -変形調和振動子の代数とその性質

$q$ -変形調和振動子は、ある実定数  $q$  と  $q$ -変形交換関係

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]_q = q\hat{A}\hat{A}^\dagger - q^{-1}\hat{A}^\dagger\hat{A} = 1 \quad (2.1)$$

を満足する  $q$ -変形消滅演算子  $\hat{A}$  および生成演算子  $\hat{A}^\dagger$  と、それらの  $q$ -変形反交換関係からなるハミルトニアン

$$\hat{H}_q = \frac{1}{2} \{\hat{A}, \hat{A}^\dagger\}_q = \frac{1}{2} (q\hat{A}\hat{A}^\dagger + q^{-1}\hat{A}^\dagger\hat{A}) \quad (2.2)$$

を与えることにより定義できる。

ハミルトニアンに対する基底状態  $|0\rangle$  は、通常の調和振動子と同様に

$$\hat{A}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (2.3)$$

を満足する。また、励起状態は、 $|0\rangle$  と  $A^\dagger$  および以下で決定される規格化定数  $N_n$  から構成される。

$$|n\rangle = N_n (\hat{A}^\dagger)^n |0\rangle, \quad \langle n|n\rangle = 1 \quad (2.4)$$

$\hat{A}$  と  $\hat{A}^\dagger$  の  $q$ -変形交換関係とハミルトニアンを用いることにより、 $\hat{A}$  と  $\hat{H}_q$  の  $q$ -変形交換関係と  $\hat{H}_q$  と  $\hat{A}^\dagger$  の  $q$ -変形交換関係は、それぞれ

$$[\hat{A}, \hat{H}_q]_q = \frac{1}{2} (q + q^{-1}) \hat{A}, \quad (2.5)$$

$$[\hat{H}_q, \hat{A}^\dagger]_q = \frac{1}{2} (q + q^{-1}) \hat{A}^\dagger \quad (2.6)$$

と計算される。(2.4) 式で構成された励起状態がハミルトニアンの固有状態であることは、上式より明らかである。また、励起状態  $|n\rangle$  のエネルギー固有値は、上式から導出される等比級数

$$q \left( E_n - \frac{1}{2} \frac{q + q^{-1}}{q - q^{-1}} \right) = q^{-1} \left( E_{n-1} - \frac{1}{2} \frac{q + q^{-1}}{q - q^{-1}} \right) \quad (2.7)$$

と基底状態のエネルギー  $E_0 = \frac{1}{2}$  を用いることにより

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{q + q^{-1} - 2q^{-2n-1}}{q - q^{-1}} \quad (2.8)$$

と定まる.

ハミルトニアンに対する固有ベクトル  $|n\rangle$  の規格化定数  $N_n$  は

$$N_n = \prod_{m=1}^n \left( \frac{q - q^{-1}}{1 - q^{-2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

と導かれる.

以下では,  $q$ -変形交換関係とハミルトニアンを満足する  $q$ -変形調和振動子の  $x$ -表示について解析を行う.

### 3. $q$ -変形調和振動子の $x$ -表示

$q$ -変形交換関係を満足する  $q$ -変形消滅演算子  $\hat{A}$  と生成演算子  $\hat{A}^\dagger$  の  $x$ -表示を求めるために, 運動量演算子のみを含む演算子  $D(\hat{p})$

$$D(\hat{p}) = \frac{i}{(s-t)} [\exp(s\hat{p}) - \exp(t\hat{p})] \quad (3.1)$$

が導入される. ここで,  $s$  と  $t$  は,  $q$  に関係した実パラメータである. 任意の状態  $|\psi\rangle$  に作用する  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}^\dagger$ ,  $D(\hat{p})$  なる演算子の  $x$ -表示は

$$\langle x|\hat{A}|\psi\rangle = A(x)\psi(x), \quad \langle x|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = A^\dagger(x)\psi(x), \quad (3.2)$$

$$\langle x|D(\hat{p})|\psi\rangle = D\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x) \quad (3.3)$$

によって定義される. ここで,  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  である. したがって,  $D(\hat{p})$  の  $x$ -表示は, (3.1) 式により一階差分演算子と見なすことができる.

このようにして,  $x$ -表示された  $A(x)$ ,  $A(x)^\dagger$  は, 一階差分演算子  $D\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)$  を用いて

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \exp[-ih(x)] D\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) \frac{1}{f(x)g(x)}, \quad (3.4)$$

$$A^\dagger(x) = -\frac{1}{f(x)g(x)} D\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) \frac{f(x)}{g(x)} \exp[ih(x)] \quad (3.5)$$

の形に分解可能であると仮定される. ここで, 関数  $f(x)$ ,  $g(x)^2$ ,  $h(x)$  は,  $x \in \mathbf{R}$  で実である関数であり, 複素  $x$ -平面上で解析的であると仮定することにより以下で決定される.

変形パラメータ  $q$  と  $s, t$  の間の関係は,  $s, t$  が対称な形

$$q = \exp(s^2 + t^2 + 3st) \quad (3.6)$$

によって定義される.

$q$ -変形交換関係の右辺が定数項だけしか含まないという条件から, 実パラメータ  $s, t$  は, 条件

$$s = 0 \text{ 又は } t = 0, \quad (3.7)$$

$$s + t = 0 \quad (3.8)$$

のどちらかを満たさなければならない. 以下の章の解析結果により,  $t = 0$  の場合は Macfarlane 型の  $q$ -変形調和振動子と同一視でき,  $t = -s$  の場合は Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子と同一視できる.

任意の波動関数  $\psi(x)$  と  $\phi(x)$  に対する内積は, 通常ヒルベルト内積

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_I dx \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle = \int_I dx \psi^*(x) \phi(x) \quad (3.9)$$

によって定義される. ここで,  $I$  は,  $q$ -変形調和振動子が定義される  $x$ -空間の領域である.  $q$ -変形消滅演算子  $A(x)$  および生成演算子  $A^\dagger(x)$  は, ハミルトニアン固有状態によって生成されたヒルベルト空間上で, 互いに Hermite 共役な演算子となる.

ハミルトニアンの固有ベクトル  $|n\rangle$  は,  $x$ -表示すると

$$\psi_n(x) = \langle x | n \rangle \quad (3.10)$$

と書くことができる.  $A(x)\psi_0(x) = 0$  を満たす基底状態の固有関数は, 自然に

$$\psi_0(x) = \langle x | 0 \rangle = K_0 g(x) f(x) \quad (3.11)$$

と与えられる. ここで, 規格化定数  $K_0$  は,  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$  であることを考慮することにより

$$K_0 = \left[ \int_I f(x)^2 |g(x)|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

と計算できる.

以下の解析のために, 関数

$$F(x) = \left[ \frac{f(x + is)}{f(x)} \right]^2 \quad (3.13)$$

を導入する. 上式で導入した関数  $F(x)$  は, 関数  $f(x)$  の解析性のために

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(x) = 1 \quad (3.14)$$

を満たさなければならない.

#### 4. Macfarlane 型の $q$ -変形調和振動子 ( $q = e^{s^2}$ )

$q$ -変形交換関係が成り立つためには, 成分関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  が 3 方程式

$$\frac{q - q^{-1}}{s^2 g(x)^4} = 1, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{f(x+is)}{f(x)g(x)^2} + \frac{f(x)}{f(x+is)g(x+is)^2} \right] \\ &= q^{-2} \left[ \frac{f(x)}{f(x+is)g(x)^2} + \frac{f(x+is)}{f(x)g(x+is)^2} \right] \exp\{i[h(x) - h(x+is)]\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$f(x)^2 f(x+2is)^2 = q^{-2} f(x+is)^4 \exp\{i[h(x) - h(x+2is)]\}. \quad (4.3)$$

を満たさなければならない.

(4.1) 式の解は

$$g(x) = \pm \left( \frac{q - q^{-1}}{s^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \pm i \left( \frac{q - q^{-1}}{s^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.4)$$

となる. しかし, 一般性を失うことなく関数  $g(x)$  は

$$g(x) = \left( \frac{q - q^{-1}}{s^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.5)$$

と選ぶことができる.

関数  $g(x)$  が定数であることから, 方程式 (4.2) は単純化され

$$\exp\{i[h(x) - h(x+is)]\} = q^2 \quad (4.6)$$

となる. その結果として, 差分方程式

$$h(x) - h(x+is) = -2is^2 + 2\pi l \quad (4.7)$$

を得る. ここで,  $l$  は任意の整数である. この差分方程式の一般解は, 任意である係数  $a_n$  を用いて

$$h(x) = 2sx + i\frac{2\pi l}{s}x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi n}{s}x\right) \quad (4.8)$$

と表せる. 不定である右辺の第三項目は, 差分方程式の固有の結果として現れる因子である. 関数  $h(x)$  は,  $x \in \mathbf{R}$  で実であることと,  $s \rightarrow 0$  で有限であることにより,  $l = 0$  および  $a_n = 0 (n \neq 0)$  が導かれ, その結果として

$$h(x) = 2sx + a_0 \quad (4.9)$$

と制限される.

(3.13) 式によって導入された関数  $F(x)$  を用いることにより, (4.3) 式は

$$F(x + is) = q^2 F(x) \quad (4.10)$$

と表現される. この方程式を満足する一般解は

$$F(x) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{2n\pi}{s}x\right) \right] \exp(-2isx) \quad (4.11)$$

で与えられる. ここで, 周期  $is$  を持つ周期関数は, 関数  $h(x)$  の場合と同様に差分方程式による固有の結果として現れる. 関数  $f(x)$  が複素  $x$ -平面で解析的であるという条件 (3.14) 式から, 周期関数の係数は,  $b_0 \neq 0$  と  $b_n = 0$  ( $n \neq 0$ ) に制限される. その結果, 関数  $F(x)$  の解析解は

$$F(x) \equiv \left[ \frac{f(x + is)}{f(x)} \right]^2 = q \exp(-2isx) = \exp(s^2 - 2isx) \quad (4.12)$$

として与えられる. ここで, 係数  $b_0 = q$  であることは, 以下で導出される関数  $f(x)$  が  $x \in \mathbf{R}$  で実であることと,  $s \rightarrow 0$  で原点を中心とする通常の調和振動子に帰着するように決定された. つまり, 関数  $f(x)$  の解は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp\left(-\frac{s^2}{8} - \frac{2m^2\pi^2}{s^2} + \frac{2m\pi}{s}x\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - i\frac{1}{2}s\right)^2 - i\frac{1}{2}sx\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{2m\pi}{s}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

である. 係数  $c_m$  は, 関数  $f(x)$  が 2 乗可積分可能であるように選ばれた定数である. すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \sqrt{\pi} \sum_{n,m} c_n c_m \exp\left[-\frac{(m-n)^2\pi^2}{s^2}\right] < \infty \quad (4.14)$$

である. 以上により, 成分関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  の形が決定したので, (3.4) 式と (3.5) 式の形に因数分解可能な  $q$ -変形消滅演算子  $A(x)$  と生成演算子  $A^\dagger(x)$  は, 関数  $h(x)$  から生じる位相因子を除いて決定される. (4.9) 式で  $a_0 = 0$  と選べば,  $h(x) = 2sx$  となる. この選択により, Shabanov によって解析された Macfarlane 型の解を見出すことができる [2].

以上により, Macfarlane 型の  $q$ -変形消滅・生成演算子の形が局所的に固定された. 次にハミルトニアン固有状態を見出すために,  $q$ -Hermite 多項式を導出する. 演算子間の関係式

$$\begin{aligned} A^{\dagger 2} &= i(q - q^{-1})^{-\frac{1}{2}} \exp[ih(x)] \{q^{-1} \exp(-2isx) - 1\} A^\dagger \\ &\quad - q^{-1} \exp\{2i[h(x) - sx]\} (q^{-2} A^\dagger A + q^{-1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$



をハミルトニアン固有状態  $\psi_{n-1}$  に作用させると、次の漸化式

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(x) = & i [1 - q^{-2(n+1)}]^{-\frac{1}{2}} \exp[ih(x)] [q^{-1} \exp(-2isx) - 1] \psi_n(x) \\ & - \exp\{2i[h(x) - sx]\} q^{-1} \left[ \frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2(n+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \psi_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

が得られる。

ハミルトニアンの固有関数  $\psi_n(x)$  から  $q$ -Hermite 関数を引き出すために

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = & K_0 f(x) g(x) s^n \exp\{in[h(x) - sx]\} \\ & \prod_{m=0}^{n-1} \left[ q(1 - q^{-2(m+1)}) \right]^{-\frac{1}{2}} H_n(x; q^{-1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

とおく。ここで、 $\prod_{m=0}^{n-1} 1/\sqrt{q(1 - q^{-2(m+1)})} = 1$  である。上式を (4.16) 式に代入すると、 $q$ -Hermite 関数  $H_n(x; q)$  に対する第一の漸化式

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x; q^{-1}) = & \frac{i}{s} \left[ q^{-\frac{1}{2}} \exp(-isx) - q^{\frac{1}{2}} \exp(isx) \right] H_n(x; q^{-1}) \\ & - \frac{1}{s^2} (1 - q^{-2n}) H_{n-1}(x; q^{-1}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られる。さらに、 $q$ -Hermite 関数に対する第二の漸化式

$$\begin{aligned} & is \left[ q^{-\frac{1}{2}} \exp(isx) + q^{\frac{1}{2}} \exp(-isx) \right] H_{n+1}(x; q^{-1}) \\ & = q^{-n} \left[ q^{-1} \exp(2isx) H_n(x - is; q^{-1}) - q \exp(-2isx) H_n(x + is; q^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

は、関係式  $N_n \psi_{n+1} = N_{n+1} A^\dagger \psi_n$  から容易に導出される。

Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 多項式が満たす漸化式 (4.19) および基底状態の定義式  $\psi_0(x) = K_0 f(x) g(x)$  に注意すると、 $H_0(x; q^{-1}) = 1$ ,  $H_{-1}(x; q^{-1}) = 0$  が得られる。漸化式 (4.18) により、 $q$ -Hermite 関数は、 $q$ -二項係数

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_z = & \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (1 - z^{2(k+1)})}{\prod_{k=0}^{n-m-1} (1 - z^{2(k+1)}) \prod_{k=0}^{m-1} (1 - z^{2(k+1)})} \end{aligned} \quad (4.20)$$

を用いて、次のべき級数表現

$$H_n(x; q^{-1}) = \left( \frac{i}{s} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m q^{\frac{(2m-n)}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_{q^{-1}} \exp[i(2m - n)sx] \quad (4.21)$$

で与えられる。ここで得られた Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数  $H_n(x; q^{-1})$  と標準的な  $q$ -Hermite 関数  $H_n(x | q^{-2})$  [5, 14] は

$$H_n(x, q^{-1}) = s^{-n} H_n \left( \sin s \left( x + \frac{is}{2} \right) \middle| q^{-2} \right), \quad s = \sqrt{\ln q} \quad (4.22)$$

と関係づけられる。標準的な  $q$ -Hermite 関数は  $q \rightarrow 1$  で発散するが、我々が導出した Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数は、この極限のもとで発散せず、通常の Hermite 関数へ帰着する。

図 1, 2, 3 で、Macfarlane 型の  $q$ -変形調和振動子と通常の調和振動子が比較される。

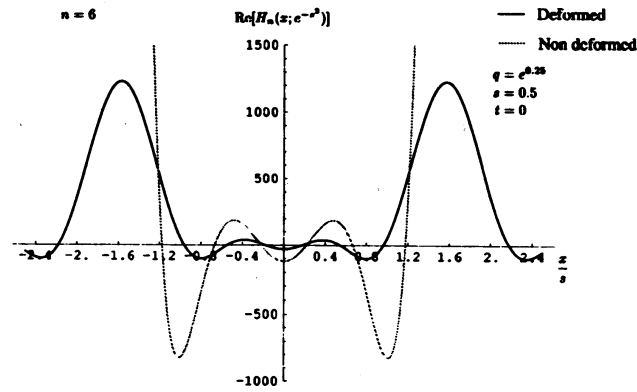


図 1: Hermite 関数と Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数の実数部の比較.  $n = 6$  での Hermite 関数と Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数 ( $s = 0.5$ ) を比較した. 薄い色の実線は Hermite 関数を表し, 黒色の実線は Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数の実部を表す.

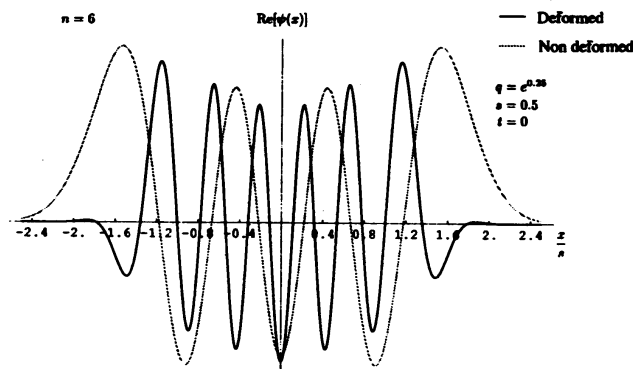


図 2: 通常の波動関数と Macfarlane 型の波動関数の実数部の比較.  $n = 6$  での通常の波動関数と Macfarlane 型の波動関数の実部 ( $s = 0.5$ ) を比較した. 薄色の実線は通常の波動関数を表し, 黒の実線は Macfarlane 型の波動関数の実部を表す.

## 5. Dubna 型の $q$ -変形調和振動子 ( $q = e^{-s^2}$ )

変形パラメータ  $q = e^{-s^2}$  である Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子は、Macfarlane 型の場合と同様に解析を進めることができる.  $q$ -変形消滅・生成演算子が  $q$ -変形交換関係を満たさなければならないという条件により、成分関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  は、三つの連立

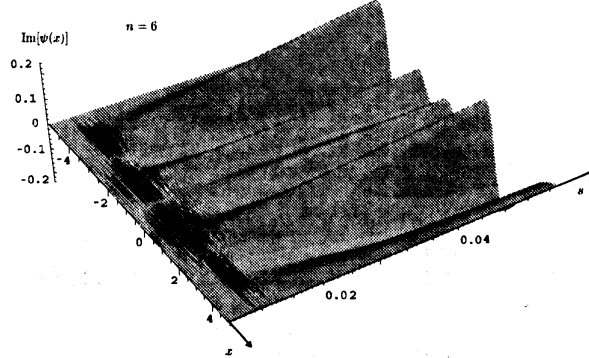


図 3: Macfarlane 型の波動関数の虚数部.  $x$  と  $s$  を変数と見なし,  $n = 6$  での Macfarlane 型の波動関数の虚部を描いた.  $s \rightarrow 0$  の極限で, この波動関数の虚部が 0 に収束している.

方程式

$$\left[ \frac{f(x+2is)}{f(x+is)} \right]^2 = q^{-2} \left[ \frac{f(x+is)}{f(x)} \right]^2 \exp\{i[h(x) - h(x+2is)]\}, \quad (5.1)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{f(x-is)} \right]^2 = q^{-2} \left[ \frac{f(x-is)}{f(x-2is)} \right]^2 \exp\{i[h(x) - h(x-2is)]\}, \quad (5.2)$$

$$q \left[ \frac{f(x)^2 f(x+is)^{-2}}{g(x+is)^2} + \frac{f(x)^2 f(x-is)^{-2}}{g(x-is)^2} \right] - q^{-1} \left[ \frac{f(x)^{-2} f(x+is)^2}{g(x+is)^2} + \frac{f(x)^{-2} f(x-is)^2}{g(x-is)^2} \right] = -4s^2 g(x)^2 \quad (5.3)$$

を満足しなければならない. 複素  $x$ -平面で解析的である関数  $h(x)$  と  $f(x)$  は, (5.1) 式と (5.2) 式により, それぞれ差分方程式

$$h(x) - h(x+2is) = l\pi, \quad (5.4)$$

$$F(x+is) = q^{-2} \exp(il\pi) F(x) \quad (5.5)$$

を満足しなければならないことが分かる. ここで,  $l$  は, 任意の整数である. これらの差分方程式の一般解は, それぞれ

$$h(x) = i \frac{\pi l}{s} x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{\pi n}{s} x\right) \quad (5.6)$$

および

$$F(x) \equiv \left[ \frac{f(x+is)}{f(x)} \right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{2n\pi}{s} x + \frac{l\pi}{s} x - 2isx\right) \quad (5.7)$$

と与えられる。関数は、 $x \in \mathbf{R}$  で実でなければならないという条件と  $s \rightarrow 0$  で発散してはいけない (解析性) という条件により

$$h(x) = a_0 \quad (5.8)$$

と限定される。一方、関数  $F(x)$  は、(3.14) 式から

$$F(x) \equiv \left[ \frac{f(x+is)}{f(x)} \right]^2 = q^{-1} \exp(-2isx) = \exp(s^2 - 2isx) \quad (5.9)$$

と一意的に決定される。関数  $F(x)$  は、変形パラメータが  $q = e^{s^2}$  である Macfarlane 型の場合に得られた (4.12) 式に等しいことが分かる。よって、関数  $f(x)$  は、Macfarlane 型と Dubna 型において、共通の形

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( x - \frac{2m\pi}{s} \right)^2 \right] \quad (5.10)$$

で与えられる。

(5.3) 式は、(3.13) 式によって定義された関数  $F(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} & F(x) [q^3 g(x+is)^2 - q^{-1} g(x-is)^2] \\ & - F(x)^{-1} [q^{-3} g(x+is)^2 - q g(x-is)^2] = -4g(x)^2 g(x-is)^2 g(x+is)^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

と書ける。上式は、 $x \in \mathbf{R}$  で実である関数  $g(x)^2$  に関して、非線型な差分方程式である。この方程式の解は

$$g_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n}^{\kappa_1 \dots \kappa_n, \lambda_1 \dots \lambda_n}(x)^2 = G_{\mu_1, \nu_1}^{\kappa_1, \lambda_1}(x) \dots G_{\mu_n, \nu_n}^{\kappa_n, \lambda_n}(x) \left( \frac{q^{-1} - q}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos sx \quad (5.12)$$

で与えられる。ただし

$$G_{\mu, \nu}^{\kappa, \lambda}(x) = \tanh^{\kappa} \left[ \frac{(2\mu+1)\pi}{2s} x \right] \coth^{\lambda} \left[ \frac{(2\nu+1)\pi}{2s} x \right] \quad (5.13)$$

であり、パラメータ  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  は、任意の整数である。因子  $G_{\mu, \nu}^{\kappa, \lambda}(x)$  は、Dubna 型にのみ存在する固有の因子であり、関係

$$G_{\mu, \nu}^{\kappa, \lambda}(x) \exp \left( is \frac{d}{dx} \right) G_{\mu, \nu}^{\kappa, \lambda}(x) = \exp \left( is \frac{d}{dx} \right) \quad (5.14)$$

を満足する。この関係式により、因子  $G_{\mu, \nu}^{\kappa, \lambda}(x)$  は、 $q$ -変形消滅演算子  $A(x)$  および生成演算子  $A^\dagger(x)$  の構造に影響を及ぼさない。よって、関数  $g(x)^2$  は、一般性を失うことなく

$$g(x)^2 = \left( \frac{q^{-1} - q}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos sx \quad (5.15)$$

と選ばれる。

成分関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  が得られたので,  $q$ -変形消滅・生成演算子の  $x$ -依存性は, 局所的に固定された. これらの関数および演算子の全域的構造については, 次節で議論される.

Macfarlane 型における  $q$ -変形消滅・生成演算子の間の関係 (4.15) 式は, ハミルトニアン固有関数間の漸化式を導出することを容易にさせた. しかし, Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子の場合において,  $A$ ,  $A^\dagger$ ,  $H_q$  のみを用いて, Macfarlane 型で得られたような関係式を構成する事は不可能である. そこで, Kasimov[10] の方法に従い, 新しい演算子

$$T = \frac{1}{g(x)} \cosh \left( is \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{g(x)} \quad (5.16)$$

を補助的に導入する. この演算子は, 関数  $g(x)$  に依存している. しかしながら, 関係 (5.14) のために因子  $G_{\mu,\nu}^{\kappa,\lambda}(x)$  は, 演算子  $T$  に影響を及ぼさない. 演算子  $T$  と  $q$ -変形消滅・生成演算子の間に, 関係

$$T^2 = s^2 q^{-1} \left( A^\dagger A + \frac{1}{q^{-1} - q} \right) \quad (5.17)$$

が存在する. それゆえ, 演算子  $T^2$  とハミルトニアンは, 同じ固有状態  $\psi_n$  を共有し, その固有値は

$$T^2 \psi_n(x) = \frac{s^2 q^{-2n-1}}{q^{-1} - q} \psi_n(x) \quad (5.18)$$

と算出される. これにより,  $T^2$  の平方根である演算子  $T$  の固有値は, 一般的に

$$T \psi_n(x) = \pm \left( \frac{s^2 q^{-2n-1}}{q^{-1} - q} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_n(x) \quad (5.19)$$

と与えられる. しかしながら, 演算子  $T$  を (3.11) 式によって定義された基底状態  $\psi_0(x)$  に作用させると

$$T \psi_0(x) = \left( \frac{s^2}{1 - q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0(x) \quad (5.20)$$

が得られる. さらに, 演算子  $T$  と  $q$ -変形消滅演算子の  $q^{\frac{1}{2}}$ -変形交換関係および演算子  $T$  と  $q$ -変形生成演算子の  $q^{-\frac{1}{2}}$ -変形交換関係は, それぞれ

$$[A, T]_{q^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (5.21)$$

$$[A^\dagger, T]_{q^{-\frac{1}{2}}} = 0 \quad (5.22)$$

と計算される. 故に, (2.4) 式により構成された励起状態  $\psi_n(x)$  は

$$T \psi_n(x) = \left( \frac{s^2 q^{-2n-1}}{q^{-1} - q} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_n(x) \quad (5.23)$$

を満たす. これにより, 自然に演算子  $T$  の固有値は, 正の数に限定される.

演算子  $T$  と  $q$ -変形消滅  $A$  および生成演算子  $A^\dagger$  の間に以下の線形関係

$$T = \frac{s}{2 \sin sx} \left[ \frac{1}{\sqrt{q}} \exp[ih(x)] A + \sqrt{q} \exp\{-i[h(x)]\} A^\dagger \right] \quad (5.24)$$

が存在する. この関係式をハミルトニアン  $H$  の固有関数  $\psi_n$  に作用することにより, 漸化式

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(x) = & 2 \left[ \frac{1}{1 - q^{2(n+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \sin sx \exp[ih(x)] \psi_n(x) \\ & - \left\{ \frac{(1 - q^{2n})^2}{[1 - q^{2n}][1 - q^{2(n+1)}]} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp[2ih(x)] \psi_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (5.25)$$

が得られる.

Macfarlane 型と同様に, Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数  $H_n(x; q)$  を引き出すために

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} K_0 f(x) g(x) s^n \exp[inh(x)] \prod_{m=0}^{n-1} [1 - q^{2(m+1)}]^{-\frac{1}{2}} H_n(x; q) \quad (5.26)$$

とおく. 上式を (5.25) 式に代入することにより, Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数に対する第一の漸化式

$$H_{n+1}(x; q) = \frac{2}{s} \sin sx H_n(x; q) - \frac{1}{s^2} (1 - q^{2n}) H_{n-1}(x; q) \quad (5.27)$$

が, 得られる. (4.19) 式と同様にして, 第二の漸化式

$$\begin{aligned} 2is \cos sx H_{n+1}(x; q) \\ = q^{-n} [\exp(2isx) H_n(x - is; q) - \exp(-2isx) H_n(x + is; q)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

を得る.

(5.27) 式と (5.28) 式から, べき級数表現を用いて  $q$ -Hermite 関数

$$H_n(x; q) = \left( \frac{i}{s} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \exp[i(2m - n)sx] \quad (5.29)$$

を得る [10,14]. これにより, 標準的な  $q$ -Hermite 関数  $H_n(\sin sx | q^2)$  と Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数は

$$H_n(x, q) = s^{-n} H_n(\sin sx | q^2), \quad s = \sqrt{\ln q^{-1}} \quad (5.30)$$

と関係付けられる. ここで得られた Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数は,  $q \rightarrow 1$  の極限で, 標準的な  $q$ -Hermite 関数とは異なり収束する.

Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数 (4.21) 式と Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数 (5.29) 式は, 同じ周期  $2\pi/s$  を持つ. 7章で, この2つの  $q$ -Hermite 関数は, 適切なパラメータ表現を用いて, 統一された形で記述される.

$q \rightarrow 1$  の極限で、ハミルトニアン固有関数 (5.26) 式が通常の固有関数へ帰着しなければならないという条件から、関数  $h(x)$  は、最も単純に  $h(x) = 0$  と選択される。この場合には、我々が導出した Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子は、 $L_2$  ノルムにおける測度関数の違いから生じる差を除いて、Kasimov の  $q$ -変形調和振動子と一致する。

図 4, 5, 6 で、Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子と通常の調和振動子が比較される。これらの Dubna 型の図と Macfarlane 型の図を比較すると、以下のことが分かる。Macfarlane 型の  $q$ -Hermite 関数の実部と Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数は、酷似している。しかしながら、両タイプの  $q$ -Hermite 関数が酷似しているにも拘わらず、波動関数の実部は、異なる特徴を示している。また、 $s \rightarrow 0$  の極限で、Dubna 型の波動関数の虚部は、Macfarlane 型の波動関数の虚部より早く 0 に収束することが分かる。

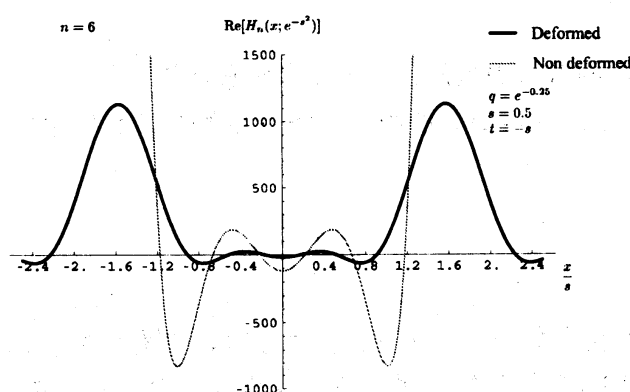


図 4: Hermite 関数と Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数の比較.  $n = 6$  での Hermite 関数と Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数 ( $s = 0.5$ ) を比較した. 薄色の実線は Hermite 関数を表し, 黒の実線は Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数を表す.

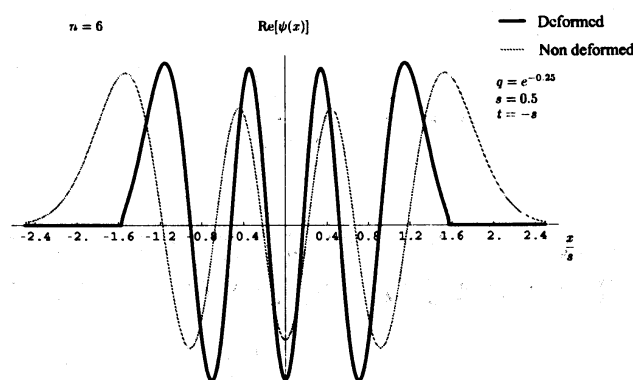


図 5: 通常の波動関数と Dubna 型の波動関数の実数部の比較.  $n = 6$  での通常の振動子の波動関数と Dubna 型の波動関数の実部 ( $s = 0.5$ ) を比較した. 薄色の実線は通常の調和振動子の波動関数を表し, 黒の実線は Dubna 型の波動関数の実部を表す.

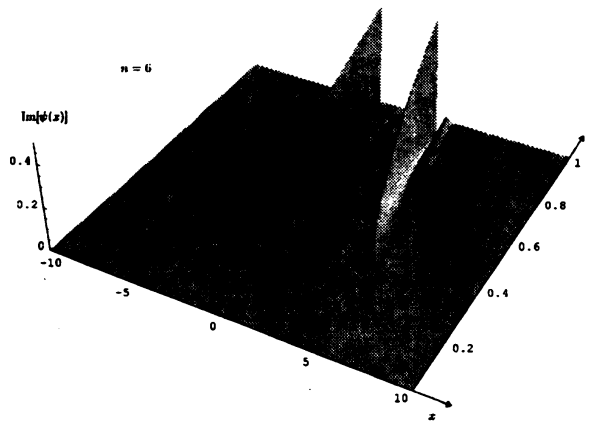


図 6: Dubna 型の波動関数の虚数部.  $x$  と  $s$  を変数と見なし,  $n = 6$  での Dubna 型の波動関数の虚部を描いた.  $s \rightarrow 0$  の極限で, Dubna 型の波動関数の虚部は, 0 に収束している.

## 6. 次元解析

前章までは, 次元を持たないパラメータ表示を用いて議論された. 本章では, 以上で解析された  $q$ -変形調和振動子に物理的意味を持たせるために, 次元量を持つパラメータを導入する. この導入により,  $q$ -変形消滅・生成演算子を再構成する. 次元量が明確になることにより, 変形理論から極限理論への移行方法を明確にすることができる.

我々が考察してきた  $q$ -変形調和振動子は,  $q \rightarrow 1$  の極限で, 通常の調和振動子へ帰着する. したがって, 通常の調和振動子に本来備わっているべき次元量であるその系の質量  $m$  と振動子の振動数  $\omega$  およびディラック定数  $\hbar$  は, 自然に導入される. また, 長さの次元を持つ物理量  $l_1 = \frac{1}{\kappa_1}$  は

$$l_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (6.1)$$

と構成される.

長さの次元を持つ座標  $y$  とエネルギーの次元を持つハミルトニアン  $H$  は, 次元を持たないパラメータ  $x, H_q$  と上で導入された次元量を用いて, それぞれ

$$y \equiv l_1 x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} x, \quad (6.2)$$

$$H \equiv \hbar\omega H_q \quad (6.3)$$

と定義される.

変形パラメータ  $q$  は, 次元を持たないパラメータである. しかしながら, このパラメータが物理的意味を持つためには, ある次元量と関係すべきである. このことから, 上で導入された次元量以外に, ある次元量を導入しなければならない. よって, 長さの



次元をもつ基本量  $l_0 = \frac{1}{\kappa_0}$  を導入する.  $q$ -変形パラメータを構成している  $s$  および  $t$  と  $l_0$  は, 振動子の長さの次元をもつ物理量  $l_1$  を用いて

$$s^2 = \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2 s_\star^2 = \frac{\hbar}{m\omega l_0^2} s_\star^2, \quad (6.4)$$

$$t^2 = \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2 t_\star^2 = \frac{\hbar}{m\omega l_0^2} t_\star^2 \quad (6.5)$$

と関係づけられる. ここで,  $s_\star$  および  $t_\star$  は, 次元を持たないパラメータである. この関係は, 以下で行われる古典極限 ( $\hbar \rightarrow 0$ ) をとるときに  $\frac{sl_1}{\hbar}$  が, 有限となるように選ばれた.

以上の次元解析により,  $q$ -変形消滅・生成演算子を構成している関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  は,  $y$  を独立変数として以下のように書き換えることができる.

$$f(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp \left[ -\frac{1}{2l_1^2} \left( y - \frac{2ml_1\pi}{s} \right)^2 \right], \quad (6.6)$$

$$g(y) = \left( \frac{e^{s^2} - e^{-s^2}}{s^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cos t \frac{y}{l_1}}, \quad (6.7)$$

$$h(y) = -2(s+t) \frac{y}{l_1} + a_0. \quad (6.8)$$

したがって,  $q$ -変形消滅・生成演算子は

$$A(y) = \frac{i}{s-t} \sqrt{\frac{s^2}{e^{s^2} - e^{-s^2}}} \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2l_1^2} y^2 + i \left( 2(s+t) \frac{y}{l_1} - a_0 \right) \right]}{\sqrt{\cos t \frac{y}{l_1}}} \left[ \exp \left( -isl_1 \frac{d}{dy} \right) - \exp \left( -itl_1 \frac{d}{dy} \right) \right] \frac{\exp \left[ \frac{1}{2l_1^2} y^2 \right]}{\sqrt{\cos t \frac{y}{l_1}}}, \quad (6.9)$$

$$A^\dagger(y) = -\frac{i}{s-t} \sqrt{\frac{s^2}{e^{s^2} - e^{-s^2}}} \frac{\exp \left[ \frac{1}{2l_1^2} y^2 \right]}{\sqrt{\cos t \frac{y}{l_1}}} \left[ \exp \left( -isl_1 \frac{d}{dy} \right) - \exp \left( -itl_1 \frac{d}{dy} \right) \right] \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2l_1^2} y^2 - i \left( 2(s+t) \frac{y}{l_1} - a_0 \right) \right]}{\sqrt{\cos t \frac{y}{l_1}}} \quad (6.10)$$

となる.

以上の次元解析により  $q$ -変形理論のハミルトニアンから極限理論のハミルトニアンまたは古典ハミルトン関数への移行方法を示すことができる.

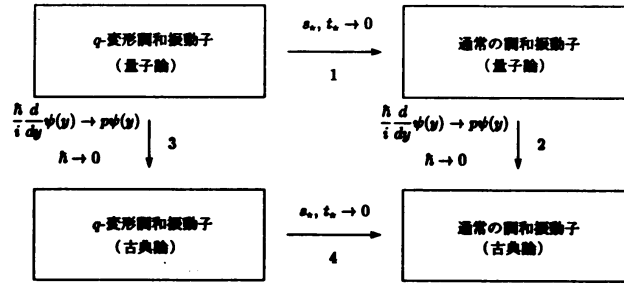


図 7: 極限理論への移行方法. この図は, 上で述べられた移行方法をまとめたものである.

### 6.1 $q$ -変形量子論と通常の量子論

$q$ -変形調和振動子のハミルトニアンから通常の調和振動子のハミルトニアンを導出するには,  $s_* \rightarrow 0$  および  $t_* \rightarrow 0$  の極限つまり,  $s \rightarrow 0$  および  $t \rightarrow 0$  の極限をとることにより達成される.

Macfarlane 型と Dubna 型の両振動子について, この極限操作を行う.

●Macfarlane 型 ( $t = 0$ ) について

$q$ -生成演算子と消滅演算子の積は

$$A(y)^\dagger A(y) = \frac{1}{e^{s^2} - e^{-s^2}} \left\{ e^{-s^2} \exp \left[ -2isl_1 \frac{d}{dy} \right] - \left( \exp \left[ is \frac{y}{l_1} + \frac{1}{2}s^2 \right] + \exp \left[ -is \frac{y}{l_1} - \frac{1}{2}s^2 \right] \right) \exp \left[ -isl_1 \frac{d}{dy} \right] + 1 \right\} \quad (6.11)$$

となる. したがって,  $q$ -変形交換関係とハミルトニアンと上式により  $s \rightarrow 0$  でハミルトニアンは

$$H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \hbar \omega [q^{-1} A^\dagger A + 1] = \frac{1}{2} \hbar \omega \left[ -l_1^2 \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{l_1^2} y^2 \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \quad (6.12)$$

となる.

●Dubna 型 ( $t = -s$ ) について

$q$ -変形生成演算子と消滅演算子の積は, この場合以下で与えられる.

$$A(y)^\dagger A(y) = \frac{1}{4(e^{s^2} - e^{-s^2})} \frac{1}{\sqrt{\cos s \frac{y}{l_1}}} \left[ \frac{\exp(-s^2)}{\cos s \left( \frac{y}{l_1} - is \right) \sqrt{\cos \frac{s}{l_1} (y - 2isl_1)}} \exp \left[ -2isl_1 \frac{d}{dy} \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\exp \left[ s^2 + 2is \frac{y}{l_1} \right]}{\cos s \left( \frac{y}{l_1} - is \right) \sqrt{\cos s \frac{y}{l_1}}} - \frac{\exp \left[ s^2 - 2is \frac{y}{l_1} \right]}{\cos s \left( \frac{y}{l_1} + is \right) \sqrt{\cos s \frac{y}{l_1}}} \\
& + \frac{\exp(-s^2)}{\cos s \left( \frac{y}{l_1} + is \right) \sqrt{\cos s \left( \frac{y}{l_1} + 2is \right)}} \exp \left[ 2isl_1 \frac{d}{dy} \right] \Bigg]. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

したがって、 $q$ -変形交換関係とハミルトニアンと上式により、 $s \rightarrow 0$ の極限の下で

$$\begin{aligned}
H &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \hbar \omega [2q^{-1} A^\dagger A + 1] = \frac{1}{2} \hbar \omega \left[ -l_1^2 \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{l_1^2} y^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \quad (6.14)
\end{aligned}$$

となる。

$s \rightarrow 0$ の極限操作により、Macfarlane型から得られた(6.12)式のハミルトニアンとDubna型から得られた(6.14)式のハミルトニアンは、通常の調和振動子のハミルトニアンと一致している。

## 6.2 通常の量子論と通常の古典論

通常の調和振動子のハミルトニアンから通常の調和振動子の古典ハミルトン関数への移行は、ハミルトン-ヤコビの方法により行われる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\hbar \rightarrow 0} H \psi(y) &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \right] \psi(y) = \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \right] \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi(y) \\
&= H(y, p) \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi(y). \quad (6.15)
\end{aligned}$$

したがって、古典ハミルトン関数は

$$H(y, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \quad (6.16)$$

で与えられる。この古典ハミルトン関数を実現できるラグランジュ関数および一般化運動量は

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2, \quad p = m \dot{y} \quad (6.17)$$

で与えられる。

ここで得られた古典ハミルトン関数は、通常の調和振動子における古典ハミルトン関数と一致する。

### 6.3 $q$ -変形量子論と変形古典理論

ハミルトニアンから古典ハミルトン関数を導出するために、再びハミルトン-ヤコビの手法を用いる。  $q$ -変形消滅・生成演算子の積を波動関数に作用させて古典極限 ( $\hbar \rightarrow 0$ ) を取ることににより、その結果

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} A(y)^\dagger A(y) \psi(y) = \frac{1}{2(s-t)^2 \cos^2 t \frac{y}{l_1}} \left[ \exp \left( 2 \frac{s l_1}{\hbar} p \right) - 2 \cos \left( (s-t) \frac{y}{l_1} \right) \exp \left( \frac{(s+t) l_1}{\hbar} p \right) + \exp \left( 2 \frac{t l_1}{\hbar} p \right) \right] \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi(y) \quad (6.18)$$

が、得られる。以下では、Macfarlane 型と Dubna 型の古典ハミルトン関数について、それぞれ考察する。

• Macfarlane 型 ( $t = 0$ ) について

上式 (6.18) より古典ハミルトン関数は、Macfarlane 型の振動子系に対して、以下で与えられる。

$$H(y, p) = \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_\star)^2} \left[ \exp \left( \frac{2\kappa_0 s_\star p}{m\omega} \right) - 2 \cos(\kappa_0 s_\star y) \exp \left( \frac{\kappa_0 s_\star p}{m\omega} \right) + 1 \right]. \quad (6.19)$$

これは、経路積分の方法により Shabanov によって導出された古典ハミルトン関数と一致する [6].

図 8 に、(6.19) 式で与えられるハミルトニアンを持つ位相空間上の等エネルギー面を示した。  $e \equiv H\kappa_0^2/m\omega^2 = 0.5$  の軌道には、運動量の大きさが無限大になる点が存在する。これは、  $e = 0.5$  では、条件

$$\exp \left( \frac{2\kappa_0 s_\star p}{m\omega} \right) = 2 \cos(\kappa_0 s_\star y) \exp \left( \frac{\kappa_0 s_\star p}{m\omega} \right)$$

を満足しなければならないことに起因する。つまり、  $\cos(\kappa_0 s_\star y) = 0$  となる点で、  $\exp \left( \frac{2\kappa_0 s_\star p}{m\omega} \right) = 0$  とならなければならないことにより、運動量の大きさが無限大になる。また、全ての軌道は通常の調和振動子とは異なりコンパクトではなく、この位相空間は周期構造を持つことが分かる。

この古典ハミルトン関数を実現することができるラグランジュ関数は

$$L(y, \dot{y}) = \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_\star)^2} \left[ \cos(\kappa_0 s_\star y) \sqrt{\left( \frac{\cos(\kappa_0 s_\star y)}{2} \right)^2 + \frac{\kappa_0 s_\star \dot{y}}{\omega}} - \frac{\kappa_0 s_\star \dot{y}}{\omega} + \frac{\cos^2(\kappa_0 s_\star y)}{2} - 1 \right] + \frac{m\omega}{\kappa_0 s_\star} \dot{y} \ln \left[ \frac{\cos(\kappa_0 s_\star y)}{2} + \sqrt{\left( \frac{\cos(\kappa_0 s_\star y)}{2} \right)^2 + \frac{\kappa_0 s_\star \dot{y}}{\omega}} \right] \quad (6.20)$$

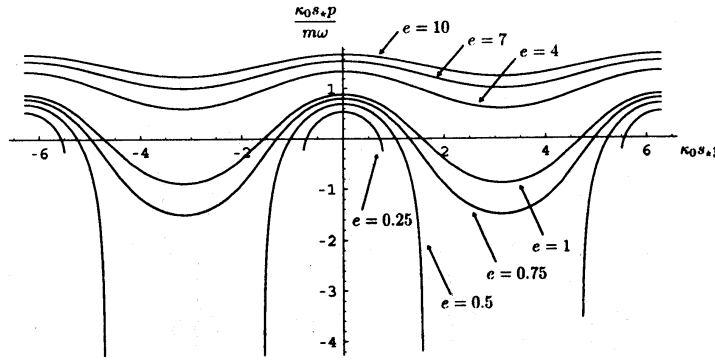


図 8: 位相空間上での Macfarlane 型の等エネルギー面. (6.19) 式で与えられた古典ハミルトン関数に対して位相空間上で等エネルギー面を描いた. 軌道のエネルギーは, 一番内側から  $e = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 4, 7, 10$  である. ここで,  $e = H\kappa_0^2/m\omega^2$  である.

で与えられる. ここで, 座標  $y$  と正準共役である一般化運動量  $p$  は

$$p = \frac{m\omega}{\kappa_0 s_*} \ln \left[ \frac{\cos(\kappa_0 s_* y)}{2} + \sqrt{\left( \frac{\cos(\kappa_0 s_* y)}{2} \right)^2 + \frac{\kappa_0 s_* \dot{y}}{\omega}} \right] \quad (6.21)$$

で与えられる.

• Dubna 型 ( $t = -s$ )

(6.18) 式により古典ハミルトン関数は, 以下で与えられる.

$$H = \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_*)^2 \cos^2(\kappa_0 s_* y)} \sinh^2 \left( \frac{\kappa_0 s_* p}{m\omega} \right) + \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_*)^2} \tan^2(\kappa_0 s_* y). \quad (6.22)$$

図 9 は, (6.22) 式で与えられたハミルトニアンを持つ位相空間上の等エネルギー面を図示した. 通常の調和振動子の軌道と同じように, Dubna 型の軌道はコンパクトであり, Dubna 型は, Macfarlane 型の半分の周期であることが分かる.

この古典ハミルトン関数を実現することができる関数は

$$L(y, \dot{y}) = -\frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_*)^2 \cos^2(\kappa_0 s_* y)} \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa_0 s_*}{\omega} \dot{y} \cos^2(\kappa_0 s_* y) \right)^2} + \frac{m\omega}{2\kappa_0 s_*} \dot{y} \sinh^{-1} \left( \frac{\kappa_0 s_*}{\omega} \dot{y} \cos^2(\kappa_0 s_* y) \right) - \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_*)^2} \tan^2(\kappa_0 s_* y) \quad (6.23)$$

である. ここで,  $y$  と正準共役な一般化運動量  $p$  は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m\omega}{\kappa_0 s_*} \sinh^{-1} \left[ \frac{\kappa_0 s_*}{\omega} \dot{y} \cos^2(\kappa_0 s_* y) \right] \quad (6.24)$$

である.

#### 6.4 変形古典論と通常の古典論

変形古典理論から古典論への移行は,  $s_* \rightarrow 0$  の極限を取るにより達成される.

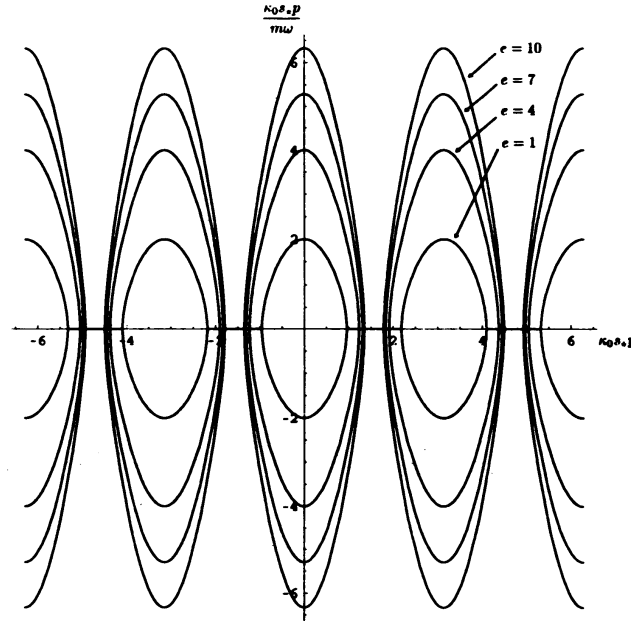


図 9: Dubna 型の位相空間. (6.22) 式で与えられた古典ハミルトン関数に対して位相空間上で等エネルギー面を図示した. 一番内側から軌道のエネルギーは,  $e = 1, 4, 7, 10$  である. ここで,  $e = H\kappa_0^2/m\omega^2$  である.

• Macfarlane 型 ( $t = 0$ ) について

$s_* \rightarrow 0$  に対して, (6.19) 式は, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
 H(y, p) &= \lim_{s_* \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} \frac{m\omega^2}{(\kappa_0 s_*)^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{2\kappa_0 s_* p}{m\omega} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\kappa_0 s_* p}{m\omega} \right)^2 + \dots \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (\kappa_0 s_* y)^2 + \dots \right] \left[ 1 - \frac{\kappa_0 s_* p}{m\omega} + \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa_0 s_* p}{m\omega} \right)^2 \dots \right] + 1 \right\} \right] \\
 &= \frac{p^2}{2m^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

さらに, ラグランジュ関数 (6.20) および一般化運動量は, 同様にして

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 y^2, \quad p = m\dot{y} \tag{6.26}$$

となる.

• Dubna 型 ( $t = -s$ ) について

先程行ったように,  $q$ -変形調和振動子の古典論と通常の振動子の古典論は,  $s_* \rightarrow 0$  の極限をとることにより一致することを Dubna 型の場合でも確かめる.

古典ハミルトン関数 (6.22) は,  $s_* \rightarrow 0$  の極限で Macfarlane の場合と同様にして

$$\begin{aligned}
 H(y, p) &= \lim_{s_* \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{m\omega^2}{(\kappa_0 s_*)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} (\kappa_0 s_* y)^2 + \dots \right] \left[ \frac{\kappa_0 s_* p}{m\omega} \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m\omega^2}{2(\kappa_0 s_*)^2} [\kappa_0 s_* y + \dots]^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \quad (6.27)$$

と計算される。ラグランジュ関数 (6.23) および一般化運動量 (6.24) もまた、同様にして  $s_* \rightarrow 0$  の極限を計算することができる。

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2, \quad p = m\dot{y}. \quad (6.28)$$

よって、Macfarlane 型および Dubna 型は、 $s_* \rightarrow 0$  の極限で通常の調和振動子へ帰することが示された。

## 7. 議論

この構成方法では、Macfarlane 型と Dubna 型の  $q$ -変形調和振動子は、変形パラメータが  $q > 1$  を満たす領域と  $q < 1$  を満たす領域の不連続領域に対して、 $q$ -変形消滅・生成演算子が同じ代数構造および同じ座標表示を用いて表されることが証明される。 $q$ -変形反交換関係によって与えられたハミルトニアンは、変形パラメータ  $q$  の単一関数によって与えられる。すなわち、その固有値  $E_n(q)$  は、 $q > 1$  である Macfarlane 型の振動子および  $q < 1$  である Dubna 型の振動子のエネルギースペクトルを実現する。さらに、これは、 $q \rightarrow 1$  で通常の調和振動子のエネルギースペクトルを実現する。

4 章と 5 章では、 $q$ -変形消滅・生成演算子を構成している関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  が、Macfarlane 型と Dubna 型のそれぞれの振動子に対して得られた。関数  $f(x)$  は、両振動子で正確に共通になることが分かった。さらに、両振動子で異なるように見える関数  $g(x)$  および  $h(x)$  は、以下のようにパラメータ表現を用いることにより、統一的に記述が可能である。

$$g(x) = \left( \frac{e^{s^2} - e^{-s^2}}{s^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cos tx}, \quad (7.1)$$

$$h(x) = -2(s+t)x + a_0. \quad (7.2)$$

演算子  $D(p)$  の中にあるパラメータ  $s, t$  の選択方法により、Macfarlane 型と Dubna 型の 2 種類の振動子が生じる。このパラメータの再利用により、この種の統一は可能である。それゆえ、4 章と 5 章で導出された固有関数が、一般的にパラメータ表示を用いて統一的に記述できることを期待するのは、自然な事である。実際、(4.17) 式と (5.26) 式の固有関数  $\psi_n(x)$  は、以下の統一された形を持つ。

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= K_0 f(x) g(x) s^n \exp \{in[h(x) + (s+t)x]\} \\ &\times \prod_{m=0}^{n-1} \left\{ e^{(s+t)^2} [1 - e^{-2s^2(m+1)}] \right\}^{-\frac{1}{2}} H_n(x; e^{-s^2}). \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここで,  $q$ -Hermite 関数  $H_n(x; e^{-s^2})$  は, Macfarlane 型および Dubna 型の  $q$ -Hermite 関数を統一的に記述した関数である. この  $q$ -Hermite 関数は, 以下の漸化式を満足する.

$$H_{n+1}(x; e^{-s^2}) = \frac{i}{s} \left( e^{\frac{1}{2}(s+t)^2 - isx} - e^{-\frac{1}{2}(s+t)^2 + isx} \right) H_n(x; e^{-s^2}) - \frac{1}{s^2} (1 - e^{-2ns^2}) H_{n-1}(x; e^{-s^2}), \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} is \left\{ \exp \left[ isx - \frac{1}{2}(s+t)^2 \right] + \exp \left[ isx - \frac{1}{2}(s+t)^2 \right] \right\} H_{n+1}(x; e^{-s^2}) \\ = e^{-ns^2} \left\{ \exp [2isx - (s+t)^2] H_n(x - is; e^{-s^2}) \right. \\ \left. - \exp [-2isx + (s+t)^2] H_n(x + is; e^{-s^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

そして, 統一的に記述した  $q$ -Hermite 関数のべき級数表現は, 以下によって与えられる.

$$H_n(x; e^{-s^2}) = \left( \frac{i}{s} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{e^{-s^2}} \exp \left\{ (2m - n) \left[ isx - \frac{1}{2}(s+t)^2 \right] \right\}. \quad (7.6)$$

この統一方法は, Macfarlane 型と Dubna 型の  $q$ -変形振動子系の密接な類似性の直接的な証拠となる.

両タイプの  $q$ -変形振動子の間の差違は, 関数  $g(x)$  に表れる. しかしながら,  $q$ -変形消滅・生成演算子は, 個々の関数よりも基本的であるからその差違は, 表面的であり本質的でないことが分かる. 実際に,  $q$ -変形消滅・生成演算子にある因子  $1/g(x)$  から生じる特異点は, 遷移振幅などに, 危害を引き起こさない.

## 参考文献

- [1] A.J. Macfarlane, J. Phys. **A22** (1989), 4581.
- [2] G. Szegő, *Gabor Szegő: Collected Papers Vol 1(1915-1927)* ed. R.A. Askey (Basel:Birkhauser, 1982), p 793.
- [3] L. Carlitz, Duke.Math.J. **41** (1957), 359.
- [4] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*(Cambridge University Press,Cambridge,1990).
- [5] R.Koekoek and R.F. Swarttouw, Delft University of Technology (1998)Report no. 98-17.
- [6] S.V. Shabanov, Phys.Lett. **B293** (1992), 117.
- [7] A.K. Rajagopal, Phys.Rev. **A47** (1993), R3465.



- [8] E.D. Kagramanov, R.M. Mir-Kasimov and S.M. Nagiyev, J.Math.Phys. **31** (1990), 1733.
- [9] N.M. Atakishiev and S.K. Suslov, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **85** (1990), 64.
- [10] N.M. Atakishiev and S.K. Suslov, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **87** (1991), 154.
- [11] R.M. Mir-Kasimov, J.Phys. **A24** (1991), 4283.
- [12] R.M. Mir-Kasimov, *Centre de Recherches Mathematiques CRM Proceedings and Lecture Notes* **9** (1996), 209.
- [13] S.M. Nagiev, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **102** (1995), 247.
- [14] N.M. Atakishiyev, A. Frank and K.B. Wolf, J.Math.Phys **35** (1994), 3253.
- [15] M.K. Atakishiyeva, N.M. Atakishiyev and C. Villegas-Blas, Journal of Computational and Applied Mathematics **99** (1998), 27.